Title	Asymptotic problems in representation theory (Representation Theory and Harmonic Analysis toward the New Century)
Author(s)	木本, 一史
Citation	数理解析研究所講究録 (2002), 1245: 154-166
Issue Date	2002-01
URL	http://hdl.handle.net/2433/41703
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録 1245 巻 2002 年 154-166

Asymptotic problems in representation theory

木本一史 (Kazufumi KIMOTO)*
九州大学大学院数理学府
kimoto@math.kyushu-u.ac.jp

1 序

1.1 問題の起源と定式化

無限次対称群

$$\mathfrak{S}_\infty = \{\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bijective}} \mathbb{N} \mid \#\mathrm{supp}(\varphi) < \infty\} = \varinjlim \mathfrak{S}_n$$

の因子表現 (II_1 型ユニタリ表現) の分類は Thoma[10] によってなされ，次のように述べられる.

Thoma の指標公式. 無限次対称群 $\mathfrak{S}_\infty$ の（因子表現に対応する）正規化指標は，次の形のもので全てを尽くす：任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ に対して

$$\chi_{\alpha,\beta}(\sigma) = \prod_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^k + (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^k \right)^{r_k(\sigma)}. \tag{1.1}$$

ただし，$\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ に対して $r_k(\sigma)$ は σ が含む長さ k の巡回置換の個数を表し，パラメタ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots)$ は条件

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0, \quad \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq 0, \quad \sum_j \alpha_j + \sum_j \beta_j \leq 1$$

を満たす. □

*Research Fellow of the Japan Society for the Promotion of Science, partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.12000766.

容易に見て取れるように，正規化指標は著しい性質として

$$\sigma \text{ と } \tau \text{ が互いに disjoint} \Longrightarrow \chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau)$$

という“乗法性”を満たすことを注意しておく.

これに対し，Versik-Kerov[11] は，上記の Thoma による結果が，有限次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の正規化指標の極限として recover されることを示した．すなわち

定理 (Versik-Kerov). $\mathfrak{S}_\infty$ の正規化指標 φ に対して，ある無限ヤング盤 $T = (\lambda_j)_{j\geq 0}$ が存在して，任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_\infty$ に対して

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n\to\infty} \frac{\chi^{\lambda_n}(\sigma)}{\dim \lambda_n} \tag{1.2}$$

となる．但し χ^{λ_n} は λ_n に対応する $\mathfrak{S}_n$ の既約表現の指標，$\dim \lambda_n$ はその次元を表す.

正規化指標の乗法性を独立に示しておけば，巡回置換という特別の場合に $\frac{\chi^{\lambda_n}(\sigma)}{\dim \lambda_n}$ の漸近的な振る舞いを見ておけば良く，その計算は初等的に実行出来る (§3)．一般の元に対する $\frac{\chi^{\lambda_n}(\sigma)}{\dim \lambda_n}$ の値の漸近的な振る舞いを記述する一般的な公式は，Kerov-Olshanski[4] によって得られた：

Kerov-Olshanski の漸近公式. $|\lambda| = n \to \infty$ のとき，

$$\frac{\chi^{\lambda}(\rho)}{\dim \lambda} = p_\rho^S\left(\frac{a_1}{n}, \ldots, \frac{a_d}{n}; \frac{b_1}{n}, \ldots, \frac{b_d}{n}\right) + O_\rho\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.3}$$

が成り立つ．剰余項の implied constant は ρ のみに依存する.

Note. Kerov-Olshanski の漸近公式は，Thoma の結果の有限版ないし精密化となっているが，指標の乗法性に対する有限版 (精密化) となっている結果

$$\sigma \text{ と } \tau \text{ が互いに disjoint} \Longrightarrow \chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau) + (\text{remainder})$$

が，Biane[2] によって得られている.

このように指標の漸近公式は，無限次対称群の指標を計算するという文脈で興味を持たれたものであったが，そこから離れてもなお，exact な値を書き下すことが出来ない量のいわば主要項の明示公式と見ることもできる．実際，既約指標の値は，Murnaghan-Nakayama の法則などが“原理的には”計算できるアルゴリズムを与えているものの，特別な場合を除いて閉じた公式は存在しないのだった.

そこで，次のように自然に一般化された問題を考えたい：群の帰納系

$$\varphi_{mk} : G_k \to G_m \quad (k \le m)$$

が与えられたとき，1つ $g \in G_k \subset G_n (n \ge k)$ を固定して，$\hat{G} = \sqcup_k \hat{G}_k$ 上の関数として見たときの（正規化）既約指標

$$\chi_g(\lambda) = \begin{cases} \frac{\chi^\lambda(g)}{\dim\lambda} & (|\lambda| \ge k), \\ 0 & (|\lambda| < k) \end{cases}$$

は，$n = |\lambda| \to \infty$ においてどのように振る舞うだろうか？(ただし，$\lambda \in \hat{G}_k$ のとき $|\lambda| = k$ とした）たとえば，$GL(\infty, \mathbb{F}_q)$ や $SL(\infty, \mathbb{F}_q)$ の正規化指標は Skudlarek[9] によって決定されているが，これの有限版にあたる，$GL(n, \mathbb{F}_q)$ や $SL(n, \mathbb{F}_q)$ たちがなす帰納系における指標の漸近公式などから手をつけたいと考えている．

また，K を $(\mathbb{N}, <)$ で順序づけられた順序圏 (orderd category) とする (see [6]) とき，$G_\sigma = \mathrm{Aut}_K(X_\sigma)$ たちは自然に帰納系をなす．たとえば，対称群 $\mathfrak{S}_n$ や一般線型群 $GL(n, \mathbb{F})$ などはこの枠組みで捉えることが出来るので，オリジナルの場合の自然な一般化であるといえる．この設定での一般的取り扱いなども興味深い．

ここでは，第2節でオリジナルである対称群の場合の Kerov-Olshanski による結果 [4] を，第3節でその特別な場合である巡回置換の場合の初等的な証明を紹介する．

1.2 対称群についての復習

n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ の共役類はいわゆるサイクルタイプ（n の分割）でパラメトライズされる．すなわち，$\mathfrak{S}_n$ の元は必ず，共通の文字を含まない（“disjoint” という言い方をすることがある）いくつかの巡回置換 $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ の積として，順番を除いて一意に書くことが出来る（巡回置換分解）．簡単のため，長さ k の巡回置換を k-cycle と書くことにする．巡回置換分解において，1-cycle が k_1 個，2-cycle が k_2 個，…，n-cycle が k_n 個現れるとき，その元のサイクルタイプは $1^{k_1} 2^{k_2} \dots n^{k_n}$ であるという．$\mathfrak{S}_n$ の２つの元が共役であるための必要十分条件は，それらのサイクルタイプが一致することであり，従って $\mathfrak{S}_n$ の共役類は n の分割でパラメトライズされる．n の分割全体を $\mathbb{P}(n)$ とおき，$\rho \in \mathbb{P}(n)$ に対応する $\mathfrak{S}_n$ の共役類を $C(\rho)$（あるいは同一視のもとで横着して単に ρ）で表すことにする．$\rho \in \mathbb{P}(k)$ に対して，$C(\rho)$ の元の符号を $(-1)^\rho$ で表す．

$k \le n$ のとき，自然な埋め込み $\mathfrak{S}_k \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$ に対応して，

$$\varphi_{nk} : \mathbb{P}(k) \ni \rho \mapsto (\rho, \overbrace{1, \dots, 1}^{n-k}) \in \mathbb{P}(n)$$

が定義できる（これによって $(\mathfrak{S}_n, \varphi_{mk})$ は帰納系をなす）．以下では，特に断らない限り，$\mathfrak{S}_n$ 上の類関数 f に対して，その $\rho \in \mathbb{P}(k)$ での値を自然に

$$f(\rho) = f(\varphi_{nk}(\rho))$$

で解釈することにする．

一方，$\mathfrak{S}_n$ の既約表現は n 個の箱からなるヤング図形でパラメトライズされる．n 個の箱からなるヤング図形の全体を $\mathbb{Y}(n)$，すべてのヤング図形全体を $\mathbb{Y} = \coprod_n \mathbb{Y}(n)$ とおく．また，$\lambda \in \mathbb{Y}$ に対応する既約表現を (π_λ, M_λ)，その既約指標を χ^λ で表す．ヤング図形 λ に対して，それを主対角線に関して反転したもの（「転置をとる」という）を λ' で表し，λ に共役な図形であるという．また，M_λ の基底は λ を枠とするヤング盤でパタメトライズされていて，従って

$$\dim \lambda := \dim M_\lambda = (\lambda \text{ のヤング盤の個数})$$

となっている．より明示的に次元を与える公式として，次が知られている ([5] などを参照)．

フックの公式． $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Y}(n)$ のとき，

$$\dim \lambda = \frac{n!}{\prod_{x\in\lambda} h(x)} = n! \frac{\prod_{i<j}(\lambda_i - \lambda_j + i - j)}{\prod_i (\lambda_i + n + 1)!} \tag{1.4}$$

が成り立つ．ただし，$x = (i,j) \in \lambda$ に対して $h(x) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$ は x におけるフックの長さ (hook length) と呼ばれる．

2 Kerov-Olshanski の漸近公式

この節では，Kerov-Olshanski[4] による，有限次対称群の既約指標値に関する漸近公式を紹介する．

2.1 関数 $f_\rho(\lambda)$

$\rho \in \mathbb{P}(k)$，$\lambda \in \mathbb{Y}$ に対して

$$f_\rho(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\chi^\lambda(\rho)}{\dim \pi_\lambda} \dfrac{n!}{(n-k)!} & n \geq k, \\ 0 & n < k \end{cases} \tag{2.1}$$

とおく．これは，おおよそ「正規化された既約指標」だが，通常はλをパラメタとする共役不変な$\mathfrak{S}_n$上の関数と見るところを，ここでは視点を変えてρをパラメタとする$\mathbb{Y}$上の関数と見ている．

群環$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$の中心を$\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n)$とする．各$\rho = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{P}(k)$に対して，$a_{\rho,n} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n)(n \geq k)$を

$$a_{\rho,n} = \sum (i_1, \ldots, i_{k_1})(i_{k_1+1}, \ldots, i_{k_1+k_2}) \ldots (i_{k_1+\cdots+k_{m-1}}, \ldots, i_k)$$

で定義する．ただし，上の和は可能なすべての$1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n$を渡る．これは書き換えると

$$a_{\rho,n} = \frac{n!}{(n-k)!} \frac{1}{\#C(\rho)} \sum_{\sigma \in C(\rho)} \sigma$$

であるから，$\{a_{\rho,n}\}_{\rho \in \mathbb{P}(n)}$は$\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n)$の基底をなす．$a_{\rho,n}|_{M_\lambda}$のトレースを２通りに計算することで，次の事実が成り立つことがわかる．

命題 2.1. $\rho \in \mathbb{P}(k)$に対して，$a_{\rho,n}(n \geq k)$のM_λ上での固有値は$f_\rho(\lambda)$に等しい． □

2.2 Schur-Weyl 双対性に対する Capelli 型恒等式

$GL(N)$の Lie 環を$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$とおき，$\mathfrak{g}$の普遍包絡環を$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$，その中心を$\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$とする．$\mathfrak{g}(GL(N))$の既約多項式表現は，高さ$l(\lambda)$が高々$N$であるようなヤング図形$\lambda \in \mathbb{Y}$によってパラメトライズされた（最高ウェイトが$\lambda$で表される）．その表現を$V_N^\lambda$と書こう．$\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]$, $GL(N)$および$\mathcal{U}(\mathfrak{g})$は，ベクトル空間$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$の上に次のような自然な表現$R_1, R_2, dR_2$を持つ（$dR_2$は$R_2$の微分表現）：

$$\begin{aligned}
R_1(\sigma)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \quad (\sigma \in \mathfrak{S}_n), \\
R_2(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_n \quad (g \in GL(N)), \\
dR_2(X)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \sum_{k=1}^{N} v_1 \otimes \cdots \otimes Xv_k \otimes \cdots \otimes v_n \quad (X \in \mathfrak{g}).
\end{aligned}$$

Schur-Weyl 双対性は，$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$の$(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n], \mathcal{U}(\mathfrak{g}))$-加群としての分解

$$(\mathbb{C}^N)^{\otimes n} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Y}(n) \\ l(\lambda) \leq N}} M_\lambda \otimes V_N^\lambda \tag{2.2}$$

であった．このことから，$\mathcal{Z}(\mathfrak{S}_n)$ と $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ は $\mathrm{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$ に同じ像を持つので

$$R_1(a_{\rho,n}) = dR_2(A_{\rho,N})$$

となるような $A_{\rho,N} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ が存在するはずである．次の事実が知られている (see [7, 8])．

特殊対称化写像の存在． $S(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ 上の対称代数とする．このとき，以下の条件を満たすような（特殊対称化写像 (special symmetrization mapping) と呼ばれる）線型同型 $\sigma\colon S(\mathfrak{g}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ が構成できる：

(a) σ はフィルター付けを保存し，それが誘導する写像 $S(\mathfrak{g}) \to \mathrm{gr}(\mathcal{U}(\mathfrak{g})) = S(\mathfrak{g})$ は恒等写像である．

(b) σ は $GL(N)$ の随伴作用と可換であり，従って $I(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})^{GL(N)}$ と $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の間の線型同型を誘導する．

(c) $GL(N)$ 上の左不変微分作用素のなす代数を $\mathcal{D}(GL(N))$ とし，$\partial\colon \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{D}(GL(N))$ を自然な代数同型とする．このとき

$$(\partial \circ \sigma)(E_{i_1 j_1} \dots E_{i_k j_k}) = \sum_{l_1,\dots,l_k=1}^{N} x_{l_1 i_1} \dots x_{l_k i_k} \frac{\partial}{\partial x_{l_1 j_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{l_k j_k}} \tag{2.3}$$

となる．ただし $\{E_{ij}\}$ は行列単位からなる $\mathfrak{g}$ の基底，x_{ij} は行列成分である．

(d) 与えられた $P \in S(\mathfrak{g})$ を E_{ij} たちの多項式と見なし，さらに $\partial/\partial y_{ij}$ たちの多項式と見なす（$y = (y_{ij})$）．このとき，$GL(N)$ 上の任意の正則関数 ϕ に対して

$$((\partial \circ \sigma)(P)\phi)(x) = P(\partial/\partial y_{ij})\phi(x(1+y))|_{y=0} \tag{2.4}$$

が成り立つ． □

$\mathbb{E} = (E_{ij}) \in \mathrm{Mat}(N, S(\mathfrak{g}))$ とおく．$\rho \in \mathbb{P}(k)$ に対して，

$$I_{\rho,N} = (\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^{k_1}) \dots (\mathrm{tr}\,\mathbb{E}^{k_m}) \in I(\mathfrak{g}) \subset S(\mathfrak{g})$$

とおく．$I(\mathfrak{g})$ を N 次行列 y に関する不変式環として実現すれば，$I_{\rho,N}$ は y の固有値に関する冪和対称関数 p_ρ になる．$A_{\rho,N} = \sigma(I_{\rho,N}) \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ とすれば，任意の $s \in C(\rho) \subset \mathfrak{S}_k$ に対して

$$\partial(A_{\rho,N}) = \sum_{l_1,\dots,l_k,i_1,\dots,i_k=1}^{N} x_{l_1 i_1} \dots x_{l_k i_k} \frac{\partial}{\partial x_{l_1 i_{s(1)}}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{l_k i_{s(k)}}} \tag{2.5}$$

定理 2.2. $A_{\rho,N} \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の $\mathrm{End}((\mathbb{C}^N)^{\otimes n})$ での像は，(1) $k > n$ ならば消えていて，(2) $k \le n$ ならば $a_{\rho,n}$ の像と一致する．従って，$A_{\rho,N}$ の V_N^λ における固有値は $f_\rho(\lambda)$ に等しい．

Proof. $\mathbb{C}^N$ の標準的な基底を $\{e_1, \ldots, e_N\}$，対応する $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ の基底を $\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}\}$ とする．この基底で $A_{\rho,N}$ の行列成分は

$$(A_{\rho,N} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_n}, e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_n}) = \partial(A_{\rho,N})\phi(x)|_{x=0},$$

但し $\phi(x) = x_{i_1 j_1} \ldots x_{i_n j_n}$．これは $a_{\rho,n}$ の行列成分と一致する． □

2.3 準対称関数

定義 2.3 (準対称関数). N 変数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ に関する多項式が準対称 (quasi-symmetric) であるとは，それが新しい変数 $l_j = \lambda_j - j$ たちのもとで対称関数になることをいう．N 変数準対称関数のなす代数を $\Lambda^Q(N)$ で表す．

Harish-Chandra 同型から，フィルター付き加群間の同型 $\mathcal{Z}(\mathfrak{g}) \to \Lambda^Q(N)$ であって，$A \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ の V_N^λ 上での固有値が，対応する準対称関数の λ での evaluation に等しいものが得られる．

射影 $\Lambda^Q(N) \to \Lambda^Q(N-1)$ を，

$$f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}, \lambda_N) \mapsto f(\lambda_1, \ldots, \lambda_{N-1}, 0)$$

で定義し，フィルター付き加群たちの列 $\Lambda^Q(1) \leftarrow \Lambda^Q(2) \leftarrow \ldots$ の射影極限の代数を準対称関数環と呼んで Λ^Q で表す．$\mathrm{gr}(\Lambda^Q) \simeq \Lambda$ である（Λ は通常の対称関数環）．Λ^Q の元は，有限項から先はすべて 0 であるような無限列 $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ たちのなす集合の上の関数として well-defined である．さらに準対称関数は，ヤング図形から来る列の上の値だけで一意に決まることがわかり，従って $\mathbb{Y}$ 上の関数環と考えることが出来る．

準対称関数環における冪和対称関数の類似を

$$p_k^Q(\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}((\lambda_i - i)^k - (-i)^k)$$

で定義すると，対称関数環の場合と同様に $\Lambda^Q = \mathbb{C}[p_1^Q, p_2^Q, \ldots]$ となる．$\rho = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{P}(k)$ に対して $p_\rho^Q = p_{k_1}^Q \ldots p_{k_m}^Q$ とおけば，$\{p_\rho^Q\}_{\rho \in \mathbb{P}}$ は Λ^Q の線型空間としての基底をなす．

$f_\rho(\lambda)$ は Harish-Chandra 同型による $A_{\rho,N}$ の像の，$\lambda \in \mathbb{Y}$ における evaluation であること，および $I_{\rho,N}$ が固有値に関する冪和対称関数 p_ρ になることから

命題 2.4. 任意の $\rho \in \mathbb{P}(k)$ に対して，f_ρ は $\lambda \in \mathbb{Y}$ に関する準対称関数で，

$$f_\rho(\lambda) = p_\rho^Q(\lambda) + \text{(lower terms)} \tag{2.6}$$

である．ただし，主要項よりも次数の低い多項式を (lower terms) と書いた． □

2.4 超対称関数

上の命題の主要項では，転置に関する指標の対称性 $f_\rho(\lambda') = (-1)^\rho f_\rho(\lambda)$ が反映されていない．この対称性の表出を改善するため，変型フロベニウス座標 (modified Frobenius coordinate) と呼ばれる，ヤング図形に対する次のようなパラメトライズを考える：

$$a_i = \lambda_i - i + \frac{1}{2}, \quad b_i = \lambda'_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, \dots, d.$$

ここで d は，λ の主対角線に現れる箱の個数である．変型フロベニウス座標を $\lambda = (a; b)$ のように表すと，$\lambda' = (b; a)$ となる．

ここで，超対称関数の定義を述べておくと，

定義 2.5 (超対称関数). $2d$ 個の変数 $(a; b) = (a_1, \dots, a_d; b_1, \dots, b_d)$ に関する多項式 f が超対称 (super-symmetric) であるとは，次の２つの条件を満たすことをいう．

(1) f は a, b それぞれに関して，d 変数の対称関数になっている．

(2) 勝手なペア (i, j) に対して，f に $a_i = -b_j = t$ を代入すると，その結果は t によらない．

超対称関数における冪和対称関数の類似を

$$p_k^S(a; b) = \sum_{i=1}^{d} a_i^k + (-1)^{k-1} \sum_{i=1}^{d} b_i^k$$

で定義しておく．

$2d$ 変数の超対称関数がなす代数を $\Lambda^S(d)$ で表す．射影 $\Lambda^S(d) \to \Lambda^S(d-1)$ を

$$f(a_1, \dots, a_{d-1}, a_d; b_1, \dots, b_{d-1}, b_d) \mapsto f(a_1, \dots, a_{d-1}, 0; b_1, \dots, b_{d-1}, 0)$$

で定義し，次数付き加群 $\Lambda^S(d)$ たちの列の射影極限を Λ^S で表し，超対称関数環と呼ぶ．Λ^S の元は，有限個を除いて他は 0 であるような無限列 $(a_1, a_2, \dots; b_1, b_2, \dots)$ たちのなす集合上の関数と見なすことが出来る．

$\Lambda^S = \mathbb{C}[p_1^S, p_2^S, \dots]$ であり，$\rho = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{P}(k)$ に対して $p_\rho^S = p_{k_1}^S \cdots p_{k_m}^S$ と定義すると，これらは線型空間としての Λ^S の基底をなす．

定理 2.6. $\mathbb{Y}$ 上の関数環として，Λ^Q と Λ^S は一致する．さらに，任意の $\rho \in \mathbb{P}(k)$ に対して

$$p_\rho^Q(\lambda) = p_\rho^S(a;b) + (\text{lower terms}) \tag{2.7}$$

が成り立つ．

Proof. 次の恒等式

$$\sum_{i=1}^{l(\lambda)} ((\lambda_i - i + 1)_k - (-i+1)_k) = \sum_{i=1}^{d} \left(\left(a_i + \frac{1}{2} \right)_k - \left(-b_i + \frac{1}{2} \right)_k \right)$$

から従う．ただし $(a)_k = a(a-1)\ldots(a-k+1)$． □

2.5 $f_\rho(\lambda)$ への適用

以上の結果を結びつけることにより，所望の結果を得ることが出来る．

定理 2.7. 関数 $f_\rho(\lambda)$ は，変型フロベニウス座標に関する超対称関数で，その主要項は $p_\rho^S(a;b)$ で与えられる． □

系 2.8 (Kerov-Olshanski の漸近公式). $|\lambda| = n \to \infty$ のとき，

$$\frac{\chi^\lambda(\rho)}{\dim \lambda} = p_\rho^S \left(\frac{a_1}{n}, \ldots, \frac{a_d}{n}; \frac{b_1}{n}, \ldots, \frac{b_d}{n} \right) + O_\rho \left(\frac{1}{n} \right) \tag{2.8}$$

が成り立つ．剰余項の implied constant は ρ のみに依存する． □

3 特別な場合の導出

この節では，巡回置換の場合について，フロベニウスの指標公式（これは Schur-Weyl 双対性を表しているのだった）を用いた Kerov-Olshanski の漸近公式の導出を紹介する．

定理 3.1 (フロベニウスの指標公式). 任意の $\rho \in \mathbb{Y}(n)$ に対して，

$$p_\rho(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} \chi^\lambda(\rho) s_\lambda(x) \tag{3.1}$$

が成り立つ．ただし，$p_\rho(x), s_\lambda(x)$ はそれぞれ冪和対称関数，シューア関数である．

(3.1) の両辺に差積 $\Delta_n(x)$ をかけると，$l_i = n - i + \lambda_i$ として

$$p_\rho(x)\Delta_n(x) = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} \chi^\lambda(\rho) \det\left(x_j^{l_i}\right)_{1\le i,j\le n} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}(n)} \chi^\lambda(\rho)\left(x_1^{l_1}\dots x_n^{l_n} + (\text{etc.})\right)$$

となる．この (etc.) の中には $x_1^{a_1}\dots x_n^{a_n}(a_1 > \cdots > a_n)$ という形の単項式は登場しないので，

$$\chi^\lambda(\rho) = p_\rho(x)\Delta_n(x) \text{ における } x_1^{l_1}\dots x_n^{l_n} \text{ の展開係数.} \tag{3.2}$$

である．これに基づいて計算しよう．

3.1 展開係数の計算

以下，m-cycle からなる共役類 $\rho = (m^1)$ で考える．このとき $\mathfrak{S}_n(n \ge m)$ で $p_\rho(x) = (x_1 + \cdots + x_n)^{n-m}(x_1^m + \cdots + x_n^m)$ であるから，$p_\rho(x)\Delta_n(x)$ は次のように展開される．

$$(x_1^m + \cdots + x_n^m) \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ i_1 + \cdots + i_n = n-m}} (-1)^\sigma \frac{(n-m)!}{i_1!\dots i_n!} x_1^{i_1+n-\sigma(1)} \dots x_n^{i_n+n-\sigma(n)}. \tag{3.3}$$

これの $x^{l_1}\dots x^{l_n}$ の係数を見ると，$a_{ij}^{(k)}$ を

$$a_{ij}^{(k)} = \begin{cases} l_i(l_i-1)\dots(l_i+j-n+1) & ,i \ne k \\ l_k(l_k-1)\dots(l_k+j-n-m+1) & ,i = k \end{cases}$$

とおけば

$$\frac{(n-m)!}{l_1!\dots l_n!}\sum_{k=1}^n \det\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1\le i,j\le n}$$

と表される．この $\det\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1\le i,j\le n}$ を計算すると，

$$\begin{aligned}\det\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1\le i,j\le n} =& l_k(l_k-1)\dots(l_k-m+1)\Delta_n(l_1,\dots,l_k-m,\dots,l_n) \\ =& \frac{l_k!}{(l_k-m)!}\prod_{1\le i<j\le n}(l_i-l_j)\prod_{j\ne k}\frac{1}{l_k-l_j}\prod_{j=1}^m(l_k-m-l_j)\times\frac{1}{-m}.\end{aligned}$$

ここで，$\phi(x)=\prod_{j=1}^{n}(x-l_j)$, $\psi(x)=\phi(x-m)\prod_{j=1}^{m}(x-j+1)$ とおけば，

$$\det\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{1\le i,j\le n}=-\frac{1}{m}\prod_{1\le i<j\le n}(l_i-l_j)\times\frac{\psi(l_k)}{\phi'(l_k)}.$$

従って，求める係数＝既約指標値は

$$\begin{aligned}\chi^{\lambda}(\rho)&=-\frac{1}{m}\frac{(n-m)!}{l_1!\dots l_n!}\sum_{k=1}^{n}\prod_{1\le i<j\le n}(l_i-l_j)\times\frac{\psi(l_k)}{\phi'(l_k)}\\&=-\frac{1}{m}\dim(\lambda)\frac{(n-m)!}{n!}\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(l_k)}{\phi'(l_k)}\qquad(\because\text{フックの公式})\end{aligned}$$

である．従って $f_\rho(\lambda)$ は

$$(\#)\qquad f_\rho(\lambda)=-\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi(l_k)}{\phi'(l_k)}=-\frac{1}{m}\left(\frac{\psi(z)}{\phi(z)}\text{の留数和}\right)$$

となる．

3.2 フロベニウス座標による書き換え

この (#) をフロベニウス座標で書き直す．以下，$\lambda\in\mathbb{Y}$ のフロベニウス座標，変型フロベニウス座標をそれぞれ $(\alpha_1,\dots,\alpha_d|\beta_1,\dots,\beta_d)$, $(a_1,\dots,a_d;b_1,\dots,b_d)$ とする．まず，

$$f(y)=\prod_{j=1}^{d}\frac{y-\alpha_j}{y+\beta_j+1},\ g(y)=f(y-m)\times\prod_{j=1}^{m}(y-j+1)$$

とおくとき，次が成り立つ．

補題 3.2.

$$\frac{\psi(x)}{\phi(x)}=\frac{g(x-n)}{f(x-n)}.$$

Proof. $l_j=\lambda_j+n-j=\alpha_j+n(1\le j\le d)$ であること，および，次の事実 (see [5])

$$\begin{aligned}&\{l_1,l_2,\dots,l_n,n-\beta_1-1,n-\beta_2-1,\dots,n-\beta_d-1\}\\&=\{0,1,2,\dots,n-1,n+\alpha_1,n+\alpha_2,\dots,n+\alpha_d\}.\end{aligned}$$

から従う

$$\prod_{j=1}^{n}(x-l_j)\prod_{j=1}^{d}(x-n+1+\beta_j)=\prod_{j=1}^{n}(x-j+1)\prod_{j=1}^{d}(x-l_j),$$

に注意して，右辺を書き替えていけばよい． □

よって，$R \gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{\psi(z)}{\phi(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{g(z-1/2)}{f(z-1/2)}dz \tag{3.4}$$

となる．

$$\frac{g(z-1/2)}{f(z-1/2)} = \prod_{k=1}^{m}\left(z-k+\frac{1}{2}\right)\prod_{k=1}^{d}\left(1-\frac{m}{z-a_k}\right)\left(1+\frac{m}{z+b_k}\right)^{-1}$$

だが，これを ∞ 近傍で展開したときの z^{-1} の係数を計算すると $-mp_m^S(a;n) + (\text{lower})$ という形で与えられることが分かる．従って

$$\begin{aligned} &f_\rho(\lambda) = p_m^S(a;b) + (\text{lower terms}) \\ &\Longrightarrow \frac{\chi^\lambda(m\text{-cycle})}{\dim(\lambda)} = p_m^S\left(\frac{a_1}{n}\cdots\frac{a_d}{n};\frac{b_1}{n}\cdots\frac{b_d}{n}\right) + O_k\left(\frac{1}{n}\right) \quad (\text{as } n\to\infty) \end{aligned} \tag{3.5}$$

を得る．

Note. 参考までに書いておくと，

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{q_j(a;b)}{z^j} = \prod_{k=1}^{d}\left(1-\frac{m}{z-a_k}\right)\left(1+\frac{m}{z+b_k}\right)^{-1}$$

と書いたとき，q_k たちは次の漸化式を満たす．

$$q_r(a;b) = -\frac{1}{r}\sum_{k=0}^{r-1}\left(\sum_{j=0}^{r-k-1}\binom{r-k}{j}m^{r-k-j}p_j^S(a;b)\right)q_k(a;b). \tag{3.6}$$

謝辞． 神戸大学の福田香保理さんから，Newton Institute で行われたサマースクールでの講演ノートのコピーを頂きました．ここで改めてお礼を申し上げます．

参考文献

[1] Biane, P.: Minimal factorization of a cycle and central multiplicative functions on the infinite symmetric groups.: J. Combin. Theory Ser. A **76**, no.2, 197–212 (1996)

[2] Biane, P.: Representations of symmetric groups and free probability. Adv. Math. **138**, no.1, 126–181 (1998)

[3] Biane, P.: Approximate Factorization and concentration for characters of symmetric groups. Internat. Math. Res. Notices 2001, no.4, 179–192

[4] Kerov, S. and Olshanski, G.: Polynomial functions on the set of Young diagrams. C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math. **319**, 121–126 (1994)

[5] Macdonald, I. G.: "Symmetric Functions and Hall Polynomials. Second Edition". Oxford University Press (1995)

[6] Neretin, Yu. A.: "Categories of symmetries and infinite-dimensional groups". London Math. Soc. Monographs. New Series **16**. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1996)

[7] Okounkov, A. and Olshanskii, G.: Shifted Schur functions. St. Petersburg Math. J. **9**, no.2, 239–300 (1998)

[8] Okounkov, A. and Olshanskii, G.: Shifted Schur functions II. The binomial formula for characters of classical groups and its applications. Amer. Math. Soc. Transl.(2) **181**, 245–27 (1998)

[9] Skudlarek, H. L.: Die unzerlegbaren Charaktere einiger diskreter Gruppen. Math. Ann. **223** no.3, 213–231 (1976)

[10] Thoma, E.: Die unzerlegbaren, positiv-definiten Klassenfunktionen der abzählbar unendlichen, symmetrischen Gruppe. Math. Z. **85**, 40–61 (1964)

[11] Versik, A. and Kerov, S.: Asymptotic theory of characters of the symmetric group. Funct. Anal. Appl. **15**, 246–255 (1982)

[12] Note of the summer school at Newton Institute: "Symmetric functions 2001: surveys of developments and perspectives."